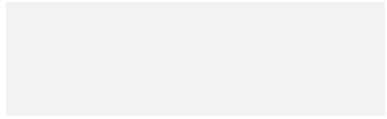




Enseignant: Philippe Michel  
Examen: Algèbre Linéaire Avancée, MATH-110  
Date: Le 23 Janvier 2025, 9h15-12h45  
Durée: 3.5 heures

# Paulina 'Pau' Villarreal Vélez

SCIPER: **1001001**

Signature: 

Attendez le début de l'examen avant de tourner la page.

Ce document est imprimé recto-verso, il contient 32 pages.

Ne pas le dégrafer.

- Aucun document n'est autorisé.
- Une calculatrice simple (sans display graphique) est autorisée.
- Pour les questions à choix multiples:
  - entourez la bonne réponse (sans justification) et utilisez un stylo à encre noire ou bleue foncée; en cas d'erreur effacez proprement avec du correcteur blanc.
  - Une réponse incorrecte compte 0 mais n'entraîne pas de point négatif.
- Pour les questions ouvertes:
  - Répondre dans l'espace dédié.
  - Vous pouvez utiliser un crayon à papier à condition d'écrire lisiblement;
  - Si vous utilisez des résultats du cours, citez-les explicitement.
  - Sauf mention explicite du contraire, on a le droit d'utiliser un résultat d'un autre exercice ou d'une question précédente du même exercice pour répondre à une question même si on ne l'a pas démontré.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- L'examen est LONG mais il n'est pas nécessaire de le faire correctement intégralement pour obtenir la note maximale.

## Formulaire concernant les polynômes

Les faits suivants sont pour rappel et sont admis.

Soit  $K$  un corps. On note

$$K[X] = \{P(X) = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \dots + a_0, a_d, \dots, a_0 \in K\}$$

l'anneau des polynômes à coefficients dans  $K$ ; c'est également un  $K$ -espace vectoriel. On écrira  $X^0 = 1$  et on identifiera comme d'habitude le corps  $K$  avec l'ensemble des polynômes constants en posant pour  $\lambda \in K$ ,  $\lambda X^0 = \lambda$ .

Étant donné un polynôme

$$P(X) = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \dots + a_0,$$

on dit qu'il est de degré  $\deg(P) = d \geq 0$  si  $a_d \neq 0$  et  $a_d$  est appelé "coefficient dominant" (par convention le polynôme nul est de degré  $\deg(0) = -\infty$ ).

Pour  $e \geq 0$  note  $K[X]_{\leq e}$  l'ensemble des polynômes de degré  $\leq e$ . C'est un sous  $K$ -espace vectoriel de  $K[X]$  dont une base est donnée par les monômes

$$\mathcal{B}_{\leq e}^0 = \{1, X, \dots, X^e\}.$$

## Divisibilité

Soient  $P, Q \in K[X]$ ; si il existe un polynôme  $S \in K[X]$  tel que  $P = Q.S$  on dit  $Q$  divise  $P$  et que  $P$  est un multiple de  $Q$ . Un polynôme  $P$  non-nul est dit irréductible si et seulement si il est de degré  $\geq 1$  et que les seuls polynômes qui le divisent sont, soit les polynômes constants (nécessairement non-nuls) soit les multiples scalaires de  $P$  (les polynômes de la forme  $\lambda.P$  avec  $\lambda \in K^\times$ ).

## Coprimauté et relations de Bezout

Deux polynômes  $A, B$  sont dit premiers entre eux et on le notera  $(A, B) = 1$  si et seulement si les seuls polynômes qui divisent à la fois  $A$  et  $B$  sont les polynômes constants.

En particulier un polynôme  $P$  est irréductible si et seulement si il est de degré  $\geq 1$  et qu'il est premier avec tout polynôme qui n'est pas un multiple de  $P$ .

**Identité de Bezout:** deux polynômes  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux si et seulement si il existe des polynômes  $C, D$  tels qu'on a l'égalité

$$C.A + D.B = 1.$$

## Division euclidienne

On rappelle également que étant donné  $A \neq 0$  un polynôme non-nul, pour tout  $P \in K[X]$  il existe des polynômes uniques  $Q, R \in K[X]$  avec  $\deg(R) < \deg(A)$  tels que

$$P = Q.A + R.$$

Le polynôme  $R$  est le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $A$  et  $Q$  est le quotient.

## Evaluation de polynômes

Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $d$ ,  $\text{End}(V)$  l'algèbre des endomorphismes de  $V$ ,  $M_d(K)$  l'algèbre des matrices  $d \times d$  à coefficients dans  $K$ . Étant donnée  $\varphi \in \text{End}(V)$  et  $M \in M_d(K)$ , l'évaluation d'un polynôme

$$P(X) = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \dots + a_0$$

en  $\varphi$  ou en  $M$  sont les éléments suivants

$$P(\varphi) = a_d \varphi^d + a_{d-1} \varphi^{d-1} + \dots + a_0 \text{Id}_V \in \text{End}(V)$$

$$P(M) = a_d M^d + a_{d-1} M^{d-1} + \dots + a_0 \text{Id}_d \in M_d(K).$$

On rappelle que les applications

$$\text{ev}_\varphi : P \in K[X] \rightarrow P(\varphi) \in \text{End}(V), \quad \text{ev}_M : P \in K[X] \rightarrow P(M) \in M_d(K)$$

sont  $K$ -lineaires et des morphismes d'anneaux pour les lois usuelles. Ainsi, si  $A, B$  sont des polynômes premiers entre eux l'identité de Bezout devient par evaluation

$$C(\varphi) \circ A(\varphi) + D(\varphi) \circ B(\varphi) = \text{Id}_V, \quad C(M).A(M) + D(M).B(M) = \text{Id}_d.$$

**Exercice 1** (Questions de cours et QCM). .

1. Enoncer le Théorème de Cayley-Hamilton pour un endomorphisme  $\varphi \in \text{End}(V)$  d'un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie.



2. Il existe un unique morphisme de groupes  $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Q}, +)$

Vrai

Faux

3. Le groupe  $(\mathbb{R}_{>0}, \times)$  muni de la multiplication externe

$$(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow x^\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$$

est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Vrai

Faux

4. Soit  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  alors  $\{\text{Id}_2, M, M^2, M^3\}$  est une base de  $M_2(\mathbb{Q})$ .

Vrai

Faux

5. Le polynôme caractéristique  $P_{car,M}(X)$  de la matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$  vaut

•  $X^3 - 3X^2 - 2X - 1$

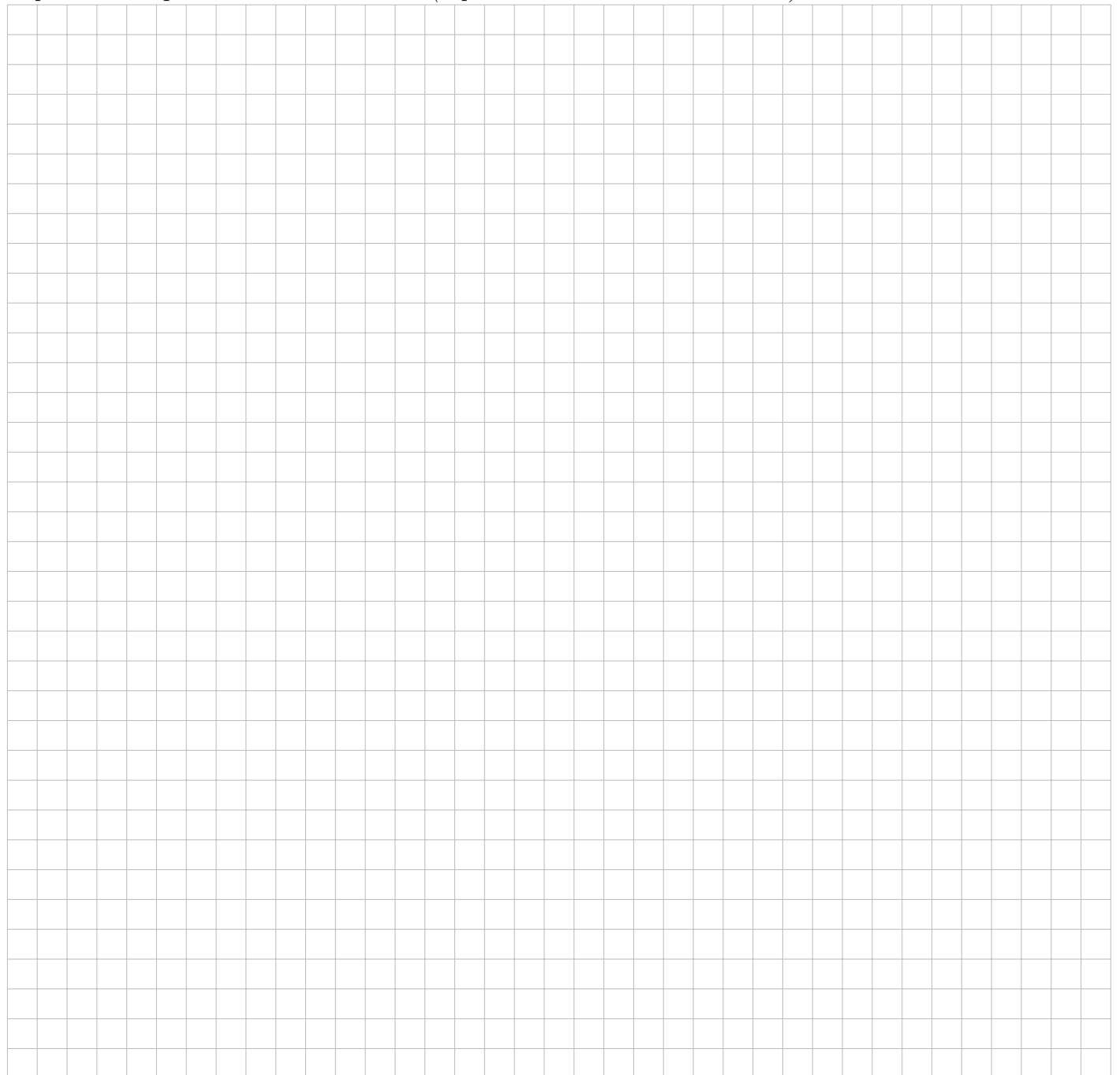
•  $X^3 - X^2 - 2X - 3$

•  $X^3 + X^2 + 2X + 3$

**Exercice 2.** Soit  $V = \{f(x) = P(x)e^{2x}, P \in \mathbb{R}[X]_{\leq 3}\}$

1. Montrer que  $V$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel isomorphe à  $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ .
2. Donner une base de  $V$ .
3. Montrer que l'application de dérivation  $Df(x) = f'(x)$  définit un endomorphisme de  $V$ .
4. Donner sa matrice dans la base que vous avez donné; est ce que  $D$  est un automorphisme ?
5. Calculer  $P_{car,D}(X)$  et trouver le/les sous-espaces propres de  $D$  (le/les  $\ker(D - \lambda \text{Id}_V)$  pour  $\lambda$  une racine de  $P_{car,D}(X)$ ).
6. Que vaut  $(D - 2\text{Id}_V)^4$ ?
7. Trouver  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $(D^2 - \lambda \text{Id}_V)^4 = \underline{0}$  (on rappelle que  $D^2 = D \circ D$ ).

*Réponses aux questions de l'Exercice 2 (répondre à l'intérieur de la boîte)*





**Exercice 3.** Soit  $(G, \cdot)$  un groupe commutatif fini de cardinal noté  $|G| = d$ . On note

$$V = \mathcal{F}(G; \mathbb{C}) = \{f : G \rightarrow \mathbb{C}\} = \mathbb{C}^G$$

l'espace vectoriel des fonctions de  $G$  à valeurs dans le corps des nombres complexes  $\mathbb{C}$ . On note

$$\widehat{G} = \text{Hom}_{Gr}(G, \mathbb{C}^\times) = \{\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^\times, \chi \text{ morphisme}\}$$

l'ensemble des morphismes du groupe  $(G, \cdot)$  vers le groupe multiplicatif  $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$ ; un tel morphisme  $\chi$  est appelé un *caractère* de  $G$ . En particulier, on a les inclusions

$$\widehat{G} \subset \mathcal{F}(G; \mathbb{C}^\times) \subset \mathcal{F}(G; \mathbb{C}).$$

Ainsi on voit  $\widehat{G}$  comme un ensemble de fonctions sur  $G$  à valeurs dans le groupe  $\mathbb{C}^\times$  ou dans  $\mathbb{C}$ . On veut étudier la structure de l'ensemble  $\widehat{G}$ .

On rappelle que  $G \curvearrowright G$  agit sur lui-même par multiplications à gauche: pour  $g \in G$  on note cette action

$$t_g : h \in G \mapsto g \cdot h \in G.$$

Cette action induit une action à droite  $\mathcal{F}(G; \mathbb{C}) \curvearrowright G$  (mais comme  $G$  est commutatif c'est aussi une action à gauche): on notera encore cette action  $t_g$ :

$$t_g : f \in \mathcal{F}(G; \mathbb{C}) \mapsto t_g(f) \text{ avec } t_g(f) : h \in G \mapsto f(g \cdot h).$$

On rappelle que cette action est linéaire:  $t_g \in \text{GL}(V)$ .

1. Donner une base de  $V$  (on ne demande pas une preuve que c'est une base).
2. Montrer que  $\widehat{G}$  est un sous-groupe du groupe  $(\mathcal{F}(G; \mathbb{C}^\times), \times)$  quand  $\mathcal{F}(G; \mathbb{C}^\times)$  est munit de la loi de *multiplication* des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}^\times$

$$f_1 \cdot f_2 : h \in G \mapsto f_1(h) \cdot f_2(h) \in \mathbb{C}^\times, f^{-1} : h \mapsto f(h)^{-1}.$$

On notera  $\underline{1}$  le caractère trivial (constant égal à 1).

3. Montrer que pour tout  $\chi \in \widehat{G}$  et tout  $g \in G$  on a  $\chi(g)^d = 1$ . En déduire que  $\widehat{G}$  est fini. On note son cardinal

$$\widehat{d} = |\widehat{G}|.$$

4. On va montrer que la famille  $\widehat{G}$  est libre dans  $V$ . Pour ce faire on introduit le "produit scalaire" sur  $V \times V$ :

$$\langle \bullet, \bullet \rangle : V \times V \mapsto \mathbb{C} \\ (f_1, f_2) \mapsto \langle f_1, f_2 \rangle = \sum_{h \in G} f_1(h) \cdot f_2(h)$$

Montrer que  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  est une forme bilinéaire symétrique et que pour tout  $g \in G$  on a

$$\langle t_g(f_1), t_g(f_2) \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle.$$

5. Montrer que pour  $\chi, \xi \in \widehat{G}$ , on a

$$\langle \chi, \xi \rangle = \begin{cases} d & \text{si } \chi \cdot \xi = \underline{1} \\ 0 & \text{si } \chi \cdot \xi \neq \underline{1} \end{cases}$$

(on pourra calculer  $t_g(\chi)$  et utiliser l'identité précédente pour un  $g$  convenable).

6. Montrer que

$$\widehat{G} = \{\chi_1 = \underline{1}, \dots, \chi_{\widehat{d}}\}$$

est une famille libre de  $V$  et que  $\widehat{d} \leq d$ .



*Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boîte)*

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for writing answers to the questions in Exercise 3.

**Exercice 4.** Soit  $K$  un corps et  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $d \geq 1$ . Soit  $\varphi \in \text{End}(V)$ . On notera

$$P_\varphi(X) = P_{\text{car},\varphi}(X) = \det(X\text{Id}_V - \varphi) \in K[X]$$

son polynôme caractéristique.

On note

$$K[\varphi] = \text{ev}_\varphi(K[X]) = \{P(\varphi), P \in K[X]\} \subset \text{End}(V)$$

l'ensemble des polynômes en  $\varphi$  (ie. l'image de  $K[X]$  par l'application d'évaluation  $\text{ev}_\varphi$ ).

1. Montrer que  $K[\varphi]$  est un sous-anneau commutatif de  $\text{End}(V)$  et un sous  $K$ -espace vectoriel (une sous  $K$ -algèbre de  $\text{End}(V)$ ).

2. Montrer que

$$K[\varphi] = K[\varphi]_{\leq d-1} = \{R(\varphi), R \in K[X], \deg R \leq d-1\}$$

et en déduire que

$$\dim_K K[\varphi] \leq d.$$

On pourra pour cela utiliser la division euclidienne de  $P$  par  $P_\varphi$  et invoquer Cayley-Hamilton.

3. On suppose à partir de maintenant que  $P_\varphi(X)$  est un polynôme irréductible. Montrer que pour tout  $R \in K[X]_{\leq d-1}$  non-nul l'endomorphisme  $R(\varphi)$  est inversible.

On pourra commencer par noter que  $R$  et  $P_\varphi$  sont premiers entre eux et utiliser l'Identité de Bezout .

4. Montrer que  $K[\varphi]$  est un corps et calculer sa dimension comme  $K$ -ev.

5. Soit

$$\text{Cent}(\varphi) = \{\psi \in \text{End}(V), \psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi\}.$$

l'ensemble des endomorphismes de  $V$  commutant avec  $\varphi$  ( $\text{Cent}(\varphi)$  est appelé le centralisateur de  $\varphi$ ). Montrer que  $\text{Cent}(\varphi)$  est un sous-anneau et un sous-espace vectoriel de  $\text{End}(V)$  et que

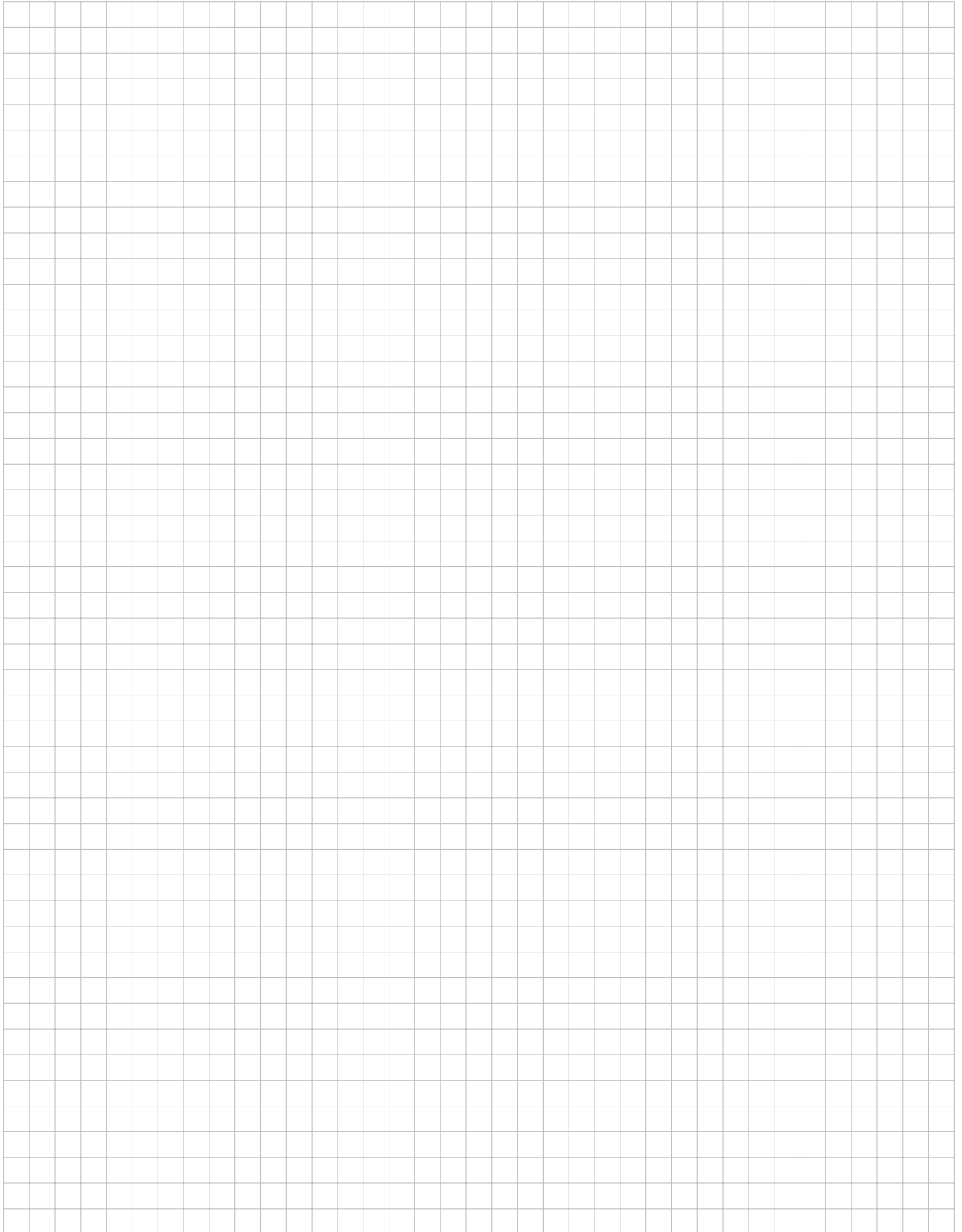
$$K[\varphi] \subset \text{Cent}(\varphi).$$

6. Soit  $\psi \in \text{Cent}(\varphi) - \{0\}$  et  $W = \ker(\psi)$ . Montrer que  $\varphi(W) \subset W$ .

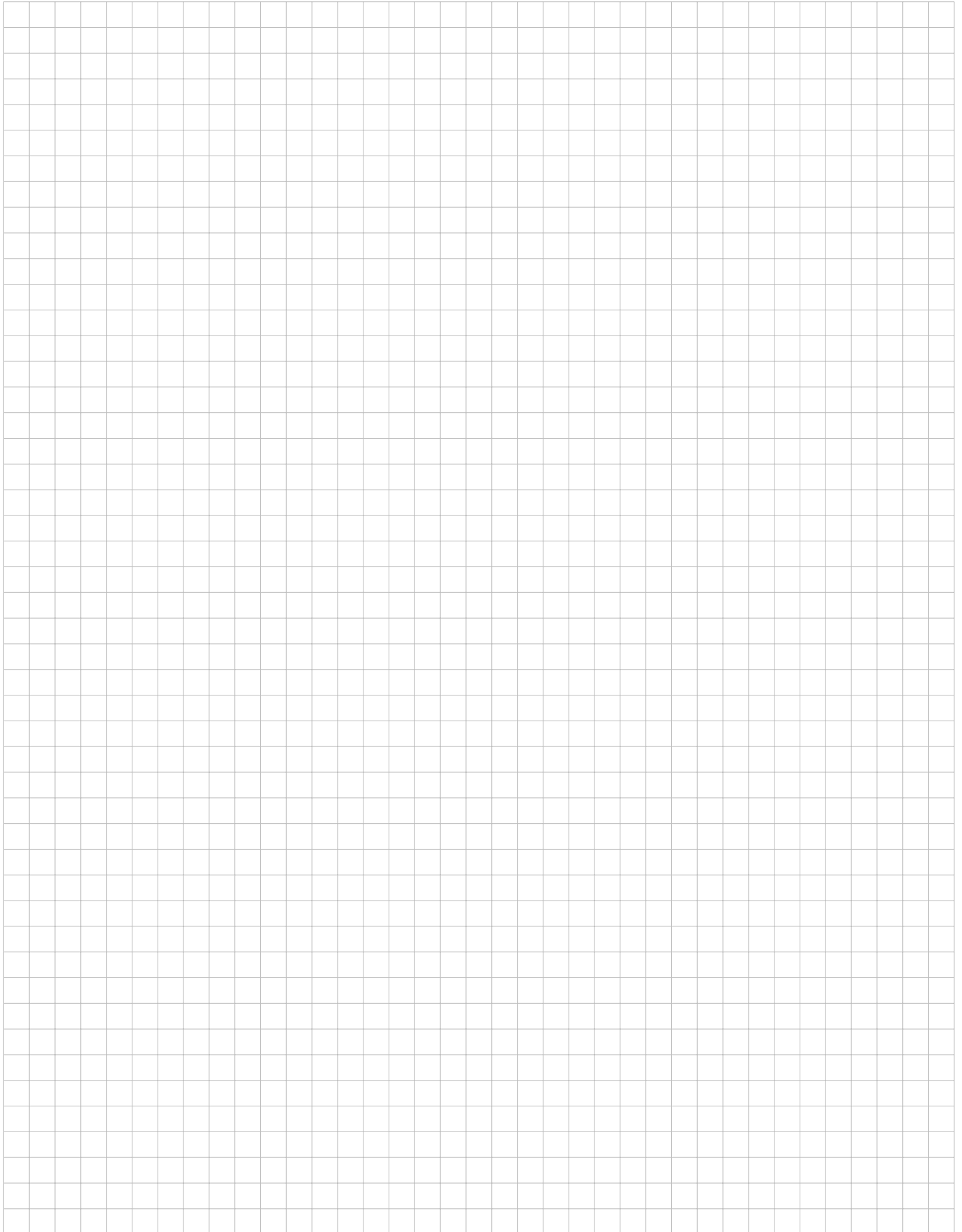
7. On suppose que  $W \neq \{0\}$ . Soit  $\varphi_W \in \text{End}(W)$  la restriction de  $\varphi$  à  $W$ . Montrer que  $P_{\text{car},\varphi_W}$  divise  $P_\varphi$  (considérer la matrice de  $\varphi$  dans une base convenable).

8. Montrer que  $\psi$  est inversible.

*Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boîte)*

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for writing answers to the questions in Exercise 4.

*Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boîte)*

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for writing answers to the questions in Exercise 4.